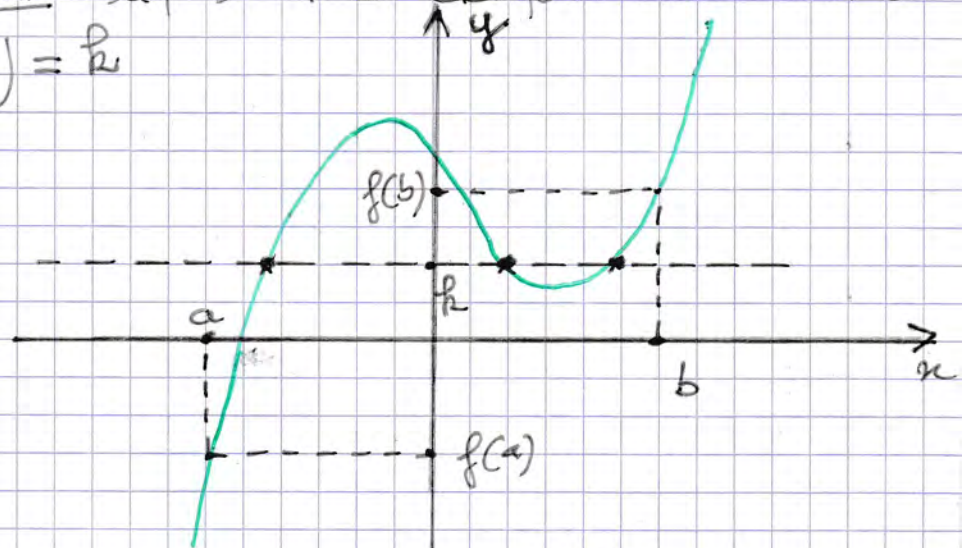


Continuité et équation $f(x) = k$

Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I = [a; b]$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$



Théorème des valeurs intermédiaires (stricte monotonie)

Soit f une fonction définie et continue et strictement monotone sur un intervalle $I = [a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans $I = [a; b]$.

► On généralise ces théorèmes à l'intervalle $I =]a; b[$.
Le nombre k doit être compris entre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

► Si $k = 0$, on montrera que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, c'est à dire que $f(a) \times f(b) < 0$

► Il y a tableau de variation suffit pour montrer la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur les divers intervalles d'étude.

exemple: Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = 2x^3 + 5x - 3$$

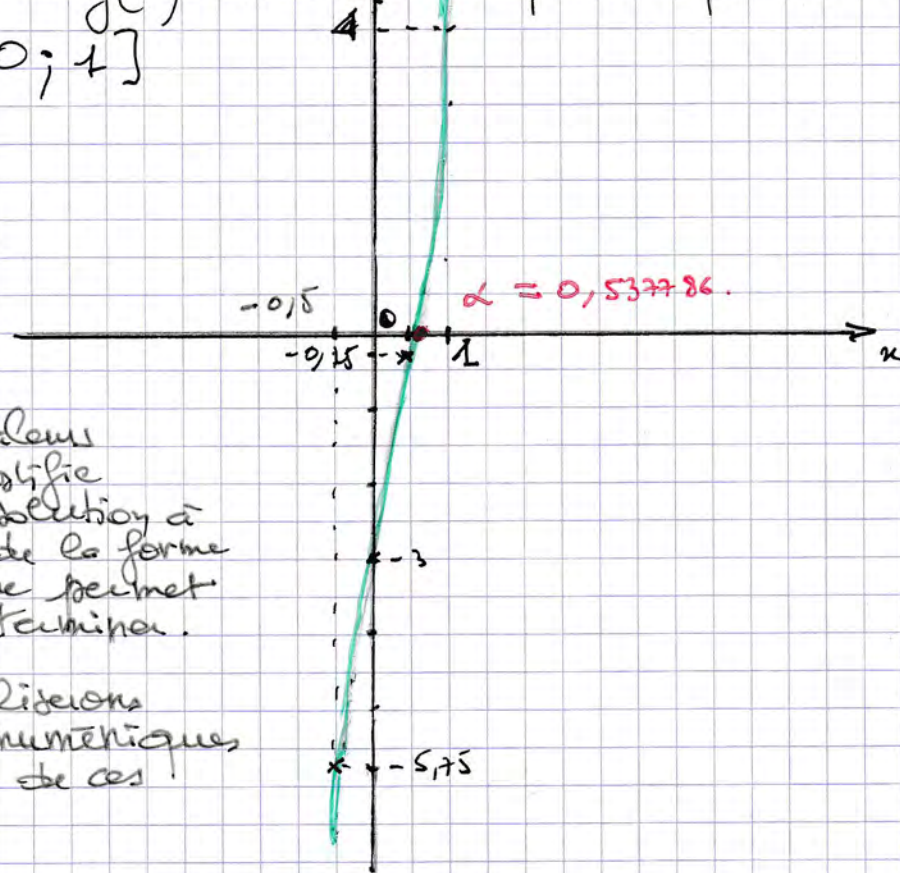
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution sur $\mathbb{R}$. On donnera en conséquence à l'unité de cette solution.

► La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

► La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = 6x^2 + 5 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

► On a $f(0) = -3 < 0$ et $f(1) = 4 > 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0; 1]$



Le théorème des valeurs intermédiaires justifie l'existence de solution à une équation de la forme $f(x) = k$ mais ne permet pas de la déterminer.

Aussi nous utiliserons des méthodes numériques d'approximation de ces solutions.

■ Encadrement des solutions : algorithme de dichotomie.

L'algorithme et le programme ci-dessous permettent de déterminer une valeur approchée (ou un encadrement) de la solution de l'équation* $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a; b]$

* Pour l'équation $f(x) = k$, il suffira de l'adapter à l'équation $g(x) = 0$ où $g(x) = f(x) - k$

Algorithme de dichotomie :

```
1  début algorithme
2  Saisir a, b, e
3  Tant que  $b - a > e$  faire
4       $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$ 
5      si  $f(a) \times f(m) \leq 0$  alors
6           $b \leftarrow m$ 
7      Sinon
8           $a \leftarrow m$ 
9      fin si
10 Fin tant que
11 Afficher a, b
12 fin algorithme.
```

```
1 # fonction f à définir
2
3 def dichotomie(a, b, e):
4     while (b - a) >= e:
5         m = (a + b) / 2
6         if f(a) * f(m) <= 0:
7             b = m
8         else:
9             a = m
10    return (a, b)
```

Si l'on programme cet algorithme en langage Python avec la fonction de l'exemple précédent, nous obtenons

Ainsi dans l'exemple précédent

- En prenant $e = 0,01$

```

1 def f(x):
2     return 2*x**3 + 5*x - 3
3
4 def dichotomie(a, b, e):
5     while (b-a) >= e:
6         m = (a+b)/2
7         if f(a)*f(m) <= 0:
8             b = m
9         else:
10            a = m
11    return (a, b)

```

```

1 >>> dichotomie(0, 1, 0.01)
2     (0.53125, 0.5390625)

```

on prend $e = 0,001$:

```

1 >>> dichotomie(0, 1, 0.001)
2     (0.5371093, 0.5380853)

```

on obtient alors: $\alpha \in [0,54 \cdot 10^{-2}]$ près.